TECHNIQUES & MÉTHODES S09

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales** ; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis !

STRUCTURE D'ENSEMBLE ORDONNÉ DE R

▪▪▪ Obtenir des inégalités

Résoudre une inéquation

Pour résoudre une inéquation, j'utilise la compatibilité de l'ordre et des opérations dans **R**. La prudence est de mise :

- si $a > 0$, $ax + b \leq 0 \iff x \leq -\frac{b}{a}$
- si $a < 0$, $ax + b \leq 0 \iff x \geq -\frac{b}{a}$.

Pour les inéquations de degré 2, vous savez que $ax^2 + bx + c$, (avec $a \in \mathbf{R}^\star$) est du signe de a à l'extérieur de l'intervalle des racines et du signe opposé à l'intérieur. Souvent, pour résoudre une inéquation $f(x) < 0$, je cherche à factoriser $f(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs dont le signe est simple à étudier (comme des polynômes de degré 1 ou 2).

Majorer, minorer la valeur absolue d'une somme

Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$. Pour majorer la valeur absolue de leur somme le meilleur réflexe est d'appliquer **l'inégalité triangulaire** :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

En deuxième méthode,j'essaie de calculer la valeur de le somme pour en déduire sa valeur absolue !

Pour minorer la valeur absolue de leur somme, j'applique **l'inégalité triangulaire bis**. On repère parmi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, celui qui a la plus grande valeur absolue (pour obtenir la meilleure inégalité possible), par exemple $|a_n|$ et puis

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \geq \left||a_n| - \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|\right|$$

▪▪▪ Parties majorées, minorées

Comment montrer qu'une partie A est majorée

Il s'agit de montrer l'existence d'un réel M tel que $\forall a \in A,\ a \leq M$. En pratique, pour déterminer le réel M, j'utilise souvent la transitivité de l'ordre.

Soit $a \in A$, on procède par majorations successives, jusqu'à l'obtention d'un majorant universel (dans A)

$$\begin{array}{rcl} a & \leq & \textit{une première majoration} \\ & \leq & \textit{une deuxième majoration plus large} \\ & \vdots & \\ & \leq & M \textit{un majorant indépendant de } a \end{array}$$

Exercice 19 : $A = \{n^2 - 2n, n \in \mathbf{N}\}$ A est-elle majorée, minorée ? *Réponse*A est minorée par -1 et non majorée

▪▪▪ Bornes supérieures, inférieures

Comment montrer l'existence d'une borne supérieure/inférieure

Pour démontrer l'existence d'une borne supérieure (resp. inférieure) j'applique la PBS (resp la PBI) :

$\boxed{1}$ je montre que A est non vide

$\boxed{2}$ je montre que A est majorée (resp. minorée)

D'après la **Propriété de la Borne Supérieure**, (resp **PBI**), A admet une borne supérieure (resp. inférieure).

En pratique, la démonstration de l'existence d'une borne supérieure ou inférieure, donne au minimum une estimation de cette borne (par passÔsup ou passÂlinf).

Soit A une partie de **R**

$\boxed{1}$ je montre que A est non vide. Pour cela j'observe que $a_0 \in A$.

$\boxed{2}$ je montre que A est majorée.

- ▸ si j'ai beaucoup de chance, a_0 majore A : en ce cas, a_0 est à la fois élément et majorant de A, c'est donc son plus grand élément et en particulier

$$\sup A = a_0$$

- si j'obtient un majorant M de A, en ce cas
$$\forall a \in A, a \leq M$$
Alors par passÔsup : M est un majorant de A. A est non vide et majorée elle admet donc une borne supérieure qui est le plus petit majorant de A. Nécessairement M est supérieur au plus petit majorant de A !
$$\sup A \leq M$$

Je retiens : un passÔsup permet d'obtenir une majoration de $\sup A$, un passÂlinf permet d'obtenir une minoration de $\inf A$

Comment calculer une borne supérieure/inférieure

Lorsque la démonstration de l'existence de la borne sup ou inf ne me donne qu'une estimation de cette borne, pour calculer finalement la valeur de cette borne, j'utilise la **Caractérisation de la Borne Supérieure** (ou la **CBI**). Pour déterminer la borne supérieure par exemple :

$\boxed{1}$ je fais un petit croquis, faisant apparaître quelques termes

$\boxed{2}$ je devine quelle est la borne supérieure α

$\boxed{3}$ je montre qu'il y a des éléments de A qui sont arbitrairement proches de α :
Soit $\varepsilon > 0$, je montre qu'il existe $a \in A$ tel que $\alpha - \varepsilon < a \leq \alpha$. Pour démontrer ce résultat existentiel deux possibilités :

- je construis un tel élément
- j'invoque un résultat existentiel du cours (j'appelle au secours et Archi m'aide ?)

Comment utiliser une borne supérieure/inférieure

Les bornes supérieures et inférieures d'une partie A de $\mathbf{R}$ remplacent les plus grand et plus petit éléments car il n'existent pas toujours, même lorsque A est non vide et bornée.

Exercice 20 : Soit (A, B) des parties bornées de $\mathbf{R}$. Montrez que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$

■ ■ ■ Partie entière

Pour calculer la partie entière d'un réel x, il s'agit d'encadrer x entre deux entiers consécutifs !

Exercice 21 : Démontrez que pour tout nombre réel $x \in \mathbf{R}$,
$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor x \right\rfloor$$

Indication : vous pourrez discuter suivant la parité de $\lfloor x \rfloor$.